平方根與近似值

1. 平方根：若 $x^2 = b$，則 x 稱為 b 的平方根。

   例 因為 $(\pm 2)^2 = 4$，所以 ± 2 是 4 的平方根。

   因為 $0^2 = 0$，所以 0 是 0 的平方根。

   因為所有實數的平方都大於或等於 0，所以<u>負數沒有平方根</u>。

2. 根號：$b \geq 0$，$\sqrt{b}$ 稱為 b 的正平方根。

   例 2 是 4 的正平方根，$\sqrt{4}$ 是 4 的正平方根，所以 $2 = \sqrt{4}$

   5 的正平方根為 $\sqrt{5}$，5 的平方根為 $\pm\sqrt{5}$

3. 根號的化簡：a、b 皆為正數，則 $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

   例 $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$

4. 最簡根號：當化簡至根號內沒有平方因數時，稱為最簡根號。

   例 $3\sqrt{2}$ 是 $\sqrt{18}$ 的最簡根號

5. 根號的大小比較：$a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$

   例 $\sqrt{50} > \sqrt{48}$

6. 十分逼近法求根號的近似值：每次分割某區間的十等分，再利用 $a^2 < x < b^2 \Rightarrow a < \sqrt{x} < b$ 求 $\sqrt{x}$ 的近似值。

   例 $2^2 < 5 < 3^2 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$

   $2.2^2 < 5 < 2.3^2 \Rightarrow 2.2 < \sqrt{5} < 2.3$

影片解析

平方根與近似值 (重要題型)

1. 已知 -3 是 $3a+4b$ 的負平方根，$a+2b-1$ 的正平方根是 2，求 $\sqrt{5b-a}$

影片解析

2. 若 $\sqrt{180a}$ 、 $\sqrt{\dfrac{180}{b}}$ 、 $\sqrt{180+c}$ 、 $\sqrt{180-d}$ 均為正整數，當 a 、 b 、 c 、 d 皆為最小正整數之情況時，求 $a+b+c+d$

影片解析

3. 利用乘法公式求 $\sqrt{159\dfrac{25}{169}}$ 的值。

影片解析

4. 已知 x 是一個三位數，而且 $\sqrt{x+50}=M$ ，$\sqrt{x-31}=N$ ，M 、 N 是正整數，請問 x 的值？

影片解析

5. 請以十分逼近法求 $\sqrt{7}$ 的近似值，並以四捨五入求到小數點後第一位。

影片解析

根式的運算

1. 最簡根式：當根式化簡至根號內沒有平方因數，且分母沒有根式時，稱為最簡根式

例 $\sqrt{6}$ 、$-2\sqrt{6}$ 、$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 均為最簡根式，

$\sqrt{24}$ 不為最簡根式，因為 $24=2^2\times 6$ 有平方因數 2^2 。

2. 同類方根：兩個最簡根式的根號內數字相同，稱這兩個根式為同類方根。

例 $\sqrt{6}$ 和 $-2\sqrt{6}$ 為同類方根。

$2\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{27}$ 為同類方根，因為 $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

3. 根式的加減法：利用分配律 $ab+ac=a(b\pm c)$ 將同類方根合併

例 $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=(2+3)\sqrt{3}$ 、$2\sqrt{3}-3\sqrt{3}=(2-3)\sqrt{3}$

4. 根式的乘法：若 $a\geq 0$ ，$b\geq 0$ ，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

例 $\sqrt{5}\times\sqrt{3}=\sqrt{5\times 3}=\sqrt{15}$

5. 根式的除法：若 $a\geq 0$ ，$b>0$ ，則 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

例 $\sqrt{5}\div\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

6. 有理化分母：將分母從含有根式變成沒有根式的過程。

(1) 分母單項 $\sqrt{b}$ ：利用擴分，分子、分母同乘以 $\sqrt{b}$

例 $\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

(2) 分母兩項 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ ：利用擴分及平方差公式，分子分母同乘以 $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$

例 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{1\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$

影片解析

根式的運算(重要題型)

1. 下列各數何者與 $-3\sqrt{2}$ 是同類方根？

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{\dfrac{6}{15}}$ (C) $\sqrt{24}$ (D) $\dfrac{3}{\sqrt{18}}$

影片解析

2. 化簡 $(\sqrt{32}+\sqrt{27})+(4\sqrt{3}-5\sqrt{2})$

影片解析

3. 化簡 $\sqrt{\dfrac{5}{7}}\times\sqrt{\dfrac{56}{25}}\div\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

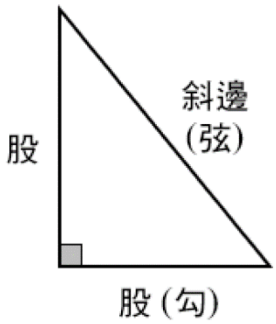
影片解析

4. 化簡 $(\dfrac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}})^2$

影片解析

畢氏定理

1. 直角三角形三邊長名稱：



2. 畢氏定理：

(1)若直角三角形兩股為：a 、b ，斜邊為c ，則$a^2+b^2=c^2$ 。

(2)若三角形三邊長為a 、b 、c ，且滿足$a^2+b^2=c^2$ ，則此三角形為直角三角形。

例 $9^2=81$ 、$40^2=1600$ 、$41^2=1681$ ，可知$9^2+40^2=41^2$ ，

所以 9、40、41 為三邊的三角形為直角三角形。

3. 畢氏數：滿足$a^2+b^2=c^2$的正整數a 、b 、c 稱為畢氏數。

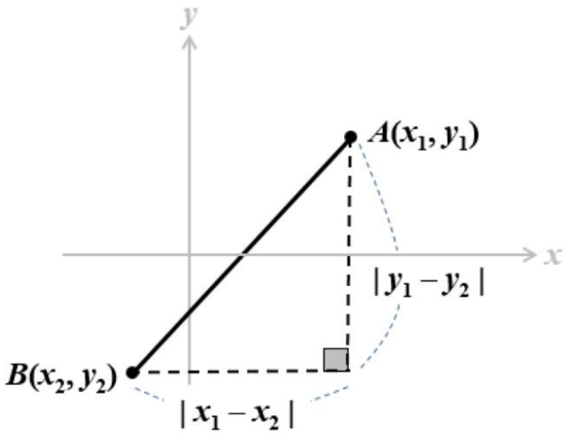
(1)常考畢式數：(3, 4, 5)、(5, 12, 13)、(7, 24, 25)、(8, 15, 17)

(2)畢氏數的倍數依舊滿足畢氏定理

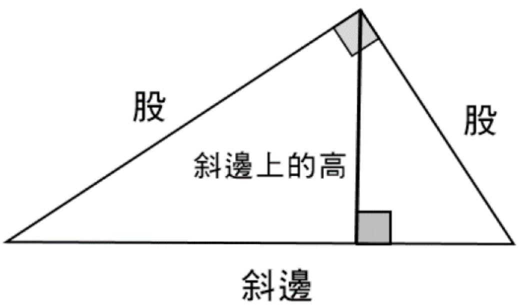
例 $(6,8,10)=(2\times3,2\times4,2\times5)$ ，$6^2+8^2=10^2$

4. 直角坐標兩點距離：$A(x_1,y_1)$ 、$B(x_2,y_2)$ ，則

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$



5. 直角三角形斜邊上的高為$\frac{\text{股}\times\text{股}}{\text{斜邊}}$



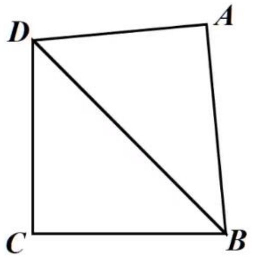
影片解析

畢氏定理 (重要題型)

1. 直角三角形中，已知兩邊長分別為 **5** 和 **12**，求第三邊長。

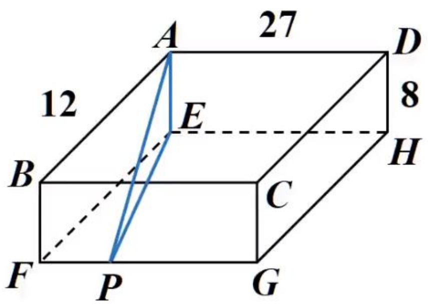
影片解析

2. 如圖，四邊形 ABCD 中，$\angle A=\angle C=90°$，$\overline{BC}=\overline{CD}=6$，$\overline{AD}=5$，請問$\overline{AB}$落在下列哪一個範圍之內？
(A) $5<\overline{AB}<6$ (B) $6<\overline{AB}<7$ (C) $7<\overline{AB}<8$ (D) $8<\overline{AB}<9$



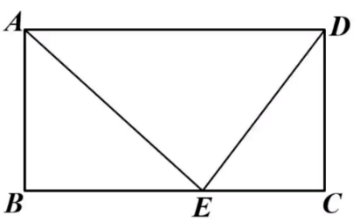
影片解析

3. 如圖，有一個長方體，已知$\overline{FP}=\frac{1}{3}\overline{FG}$ ，則$\overline{AP}$



影片解析

4. 如圖，$ABCD$ 為一個長方形，$\angle AED=90°$，已知$\overline{AE}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$\overline{DE}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，則$\overline{AB}$？



影片解析

5. 坐標平面上，以向東、向北為正。已知小傑由 $A(-2, 5)$ 出發，向東走 8 單位，再向北走 15 單位，到達 B 點，則 $\overline{AB}$ 為何？

影片解析

6. 在直角坐標平面上，點 $(12, 5)$ 到直線 $5x+12y-60=0$ 的最短距離為？

影片解析