

公因數與最大公因數

1. 公因數：共同的因數 **例** 12和18的公因數有1,2,3,6
2. 最大公因數：公因數中最大的。 **例** $(12,18) = 6$
3. 公因數的性質：公因數是最大公因數的因數。
4. 互質： A, B 為整數，且 $(A, B) = 1$ **例** $(14,15) = 1$
5. 最大公因數的求法：
 - (1) 利用標準分解式
 - (2) 短除法

最大公因數及互質

若 $A = (27, 72, 108)$ ，則小於 A 的正整數中，
「和 A 互質」的數有幾個？
(A)7個 (B)6個 (C)5個 (D)4個

學生練習

若 $A = (24, 64, 96)$ ，則小於 A 的正整數中，
「和 A 互質」的數有幾個？
(A)1個 (B)2個 (C)3個 (D)4個

比較數的大小

已知 $a = 2^3 \times 3^2 \times 5, b = 2^4 \times 3^3 \times 7$
 $c = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$ ，(1)求 a, b, c 的最大公因數
(2)比較 a, b, c 的大小

學生練習

已知 $A = 2^4 \times 3^3 \times 5, B = 2^3 \times 3^3 \times 7$ ，
 $C = 2^2 \times 3^4 \times 11$ ，則：(1)求 A, B, C 的最大公
因數 (2)比較 A, B, C 的大小。

最大公因數應用

x 為正整數，648用 x 去除餘18，747除以 x
餘12，求 x 的最大值及最小值各為多少？

學生練習

用某正整數 a 除303餘6，同時用他除1617
不足3，求 a 的最大值與最小值？

最大公因數活用

已知 b 為正整數，且 $(b, 2688) = 56$ ， $(420, b) = 140$ ，求 b 的最小值為何？

學生練習

已知 a 為正整數，且 $(a, 70) = 10$ ， $(240, a) = 80$ ，求 a 的最小值為何？

應用問題

三角公園的三邊分為**150**公尺、**180**公尺和**300**公尺，在三邊等距離種樹，且三頂點也要種樹，請問：

- (1) 相鄰兩樹的最大距離為何？
- (2) 最少要種多少顆樹？

學生練習

有一個四邊形菜園，四邊長分別為**28**公尺、**21**公尺、**14**公尺、**28**公尺，四個頂點均已立有一盞燈，今要在四邊相等間隔也立路燈，請問最少需要設置多少盞路燈？

應用問題

三種水果，有**108**顆蘋果、**72**個梨子、**48**個柿子，分裝成禮盒，使每個盒子同一種水果都一樣多，請問：

- (1) 最多可分裝成多少盒？
- (2) 每盒的水果總數為何？

學生練習

有男生**36**個，女生**27**個參加郊遊，則：

- (1) 若分成若干組，每組男生人數相等、女生人數也相等，最多可分成幾組？
- (2) 每組男、女生合計多少人？

公倍數與最小公倍數

1. 公倍數：共同的倍數 **例** 2和3的公倍數有 6, 12, 18, 24, ...
2. 最小公倍數：公倍數中最小的 **例** $[2, 3] = 6$
3. 公倍數的性質：公倍數是最小公倍數的倍數
4. 最小公倍數的求法：
 - (1) 利用標準分解式
 - (2) 短除法

求最小公倍數

$$[2^3 \times 7^2, 3^4 \times 7^3 \times 11^2, 3^2 \times 11] = \underline{\hspace{2cm}}$$

(以標準分解式表示)

學生練習

$$[200, 2 \times 3^2 \times 5^2, 14 \times 22] = \underline{\hspace{2cm}}$$

(以標準分解式表示)

求公倍數

100 ~ 200 之間，6和15的公倍數有哪些？

學生練習

200 ~ 350 的整數中，為3、4和5的公倍數有哪些？

比較數的大小

已知 a, b, c 均為正整數，試比較下面情況中 a, b, c 的大小關係？

$$(1) a \times 18 = b \times 24 = c \times 15$$

$$(2) a \times (-18) = b \times (-24) = c \times (-15)$$

學生練習

已知 a, b, c 均為正整數，試比較下面情況中 a, b, c 的大小關係？

$$(1) a \times 3 = b \times 5 = c \times 7$$

$$(2) a \times (-3) = b \times (-5) = c \times (-7)$$

最小公倍數的活用

在 1~500 之間的整數，能同時被 28 和 12 整除的數有多少個？

學生練習

在 1~1500 的範圍內，能同時被 65 和 78 整除的整數有多少個？

(A) 2 個 (B) 3 個 (C) 4 個 (D) 5 個

最小公倍數的活用

在 100~300 之間的整數，哪些數與 $\frac{1}{15}$ 和 $\frac{1}{24}$ 的乘積皆為整數？

學生練習

在 100~400 的整數中，有幾個數與 $\frac{1}{12}$ 和 $\frac{1}{28}$ 的乘積皆為整數？

最大公因數與最小公倍數的關係

- 性質 1：最大公因數 \times 最小公倍數 = 兩數乘積。例 $(6,8) \times [6,8] = 6 \times 8$
- 性質 2：若 $(a,b) = 1$ ，則 $[a,b] = a \times b$ 例 $[3,4] = 3 \times 4$
- 三個數的情況： $(a,b,c) \times [a,b,c] \neq a \times b \times c$ 例 $(2,3,4) \times [2,3,4] \neq 2 \times 3 \times 4$

計算順序

以標準分解式表示 $[(24,36),20,30]$ 的答案。

學生練習

有三數， $A = 84 \times 21$ ； $B = 20 \times 27$ ； $C = 588$ ，請計算 $([A,B],C) =$ _____
(以標準分解式表示)

活用短除法解題

將 a, b 兩個正整數做質因數分解，完整作法如圖，已知 $a > b$ ， e 為質數，且

$(a, b) = 14$ ， $[a, b] = 98$ ，則下列哪一個關係正確？

(A) $d > e$ (B) $e > f$ (C) $e > g$ (D) $f > d$

$$\begin{array}{r|l} 2 & a \quad b \\ e & c \quad d \\ & f \quad g \end{array}$$

$$a \times b = (a, b) \times [a, b]$$

若 $(a, b) = 2^2 \times 3$ ， $[a, b] = 2^4 \times 3 \times 5^2$ ，若 a, b 為正整數，且 $a = 2^2 \times 3 \times 5$ ，則 $b = ?$

活用題

已知 a, b 為兩正整數，且 $a > b$ ，若

$(a, b) = 17$ ， $[a, b] = 357$ ，求 $a + b$ 的最小值。

學生練習

利用短除法求 X, Y 兩個正整數的最大公因數和最小公倍數，完整的作法如圖。已知

$(X, Y) = 33$ ， $[X, Y] = 429$ ， $D + E = 14$ ，且 $X < Y$ ，則 $A + B + C + E = ?$

$$\begin{array}{r|l} C & X \quad Y \\ 11 & A \quad B \\ & D \quad E \end{array}$$

學生練習

若 $a = 3^2 \times 5 \times 11$ ，且 $(a, b) = 3^2 \times 11$ ，

$[a, b] = 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$ ，則 $b = ?$

學生練習

已知 a, b 為兩正整數，且 $a < b$ ，若

$(a, b) = 5$ ， $[a, b] = 105$ ，求 $a + b$ 的最小值。

實力練功坊

基礎

- 有 A 、 B 兩數，其中 $A = 24, B = 36$ ，若 $(A, B) = C$ ， $[A, B] = D$ ，請問 C 跟 D 分別為何？
(A) $C = 2^2 \times 3^2$ ； $D = 2^3 \times 3^2$ (B) $C = 2^2 \times 3$ ； $D = 2^3 \times 3^2$
(C) $C = 2 \times 3$ ； $D = 2^3 \times 3^2$ (D) $C = 2^2 \times 3$ ； $D = 2^4 \times 3^3$
- 下列哪個選項的敘述是錯誤的？
(A) 如果 a 是 **2** 的倍數，也是 **4** 的倍數，則 a 一定是 **8** 的倍數。
(B) 如果 a 是 **2** 的倍數，也是 **7** 的倍數，則 a 一定是 **14** 的倍數。
(C) 如果 a 、 b 為相異正整數，且 a 和 $a - b$ 都是 **17** 的倍數，則 b 也是 **17** 的倍數。
(D) 如果 a 、 b 為相異質數，則 a 、 b 的最小公倍數為 $a \times b$
- 下列哪些選項的敘述是正確的？
(A) 因為 **7** 是質數，所以 **7** 和 **91** 互質 (B) $(2^4 \times 3^3 \times 5^2, 2^5 \times 5^7 \times 11^{13}, 2^3 \times 5^3 \times 7^3) = 2^5 \times 5^7$
(C) (a, b) 是 $[a, b]$ 的因數 (D) $[2^2 \times 3^3 \times 5^5, 2^3 \times 3 \times 7^2, 3^5 \times 5^7 \times 7^{11}] = 2^2 \times 3^3 \times 5^5 \times 7^2$
- 若兩數互質，則下列哪一個敘述是正確的？
(A) 這兩數必均為質數 (B) 這兩數沒有公因數 (C) 這兩個數相乘必定是這兩數的最小公倍數 (D) 這兩數相加必為奇數
- 下列哪一選項中的兩數互質？(A) **57, 58** (B) **45, 54** (C) **29, 87** (D) **35, 85**
- 若 $[A, B] = 24$ ，下列哪一個數不是 A, B 兩數的公因數？(A) **1** (B) **4** (C) **10** (D) **24**
- 若 **108, 72, 90** 三數的最大公因數為 a ，最小公倍數是 b ，則下列哪一個選項是正確的？
(A) $a = 36, b = 2160$ (B) $a = 36, b = 1080$ (C) $a = 18, b = 2160$ (D) $a = 18, b = 2160$
- 下列哪一個數是 $2^2 \times 3$ 與 $2^2 \times 5^2$ 的最小公倍數？(A) $2^3 \times 3 \times 5$ (B) $2 \times 3 \times 5^2$ (C) $2^2 \times 3 \times 5^2$
(D) $2 \times 3 \times 5$
- 已知 $A = 2^3 \times 3^2$ ， $B = 2^4 \times 3$ ， $C = 2 \times 3^3 \times 5$ ，且 $(A, B, C) = a$ ， $[A, B, C] = b$ ，則下列何者正確？(A) $a = 2^4 \times 3^3 \times 5$ (B) $a = 2 \times 3$ (C) $b = 2^3 \times 3^2 \times 5$ (D) $b = 2 \times 3 \times 5$
- 已知 $1800 = 2^a \times 3^b \times 5^c$ ，求 a, b, c 的最小公倍數是多少？(A) **2** (B) **3** (C) **5** (D) **6**
- 若 A 和 **24** 的最小公倍數為 **144**，則 A 可能是下列哪一個數？(A) **36** (B) **56** (C) **72** (D) **144**
- 求 **945, 2835** 和 **540** 的最大公因數如圖，則下列四位同學的說法何者正確？
(A) 甲說：「**9** 不是質數，不能用 **9** 除，所以過程不正確。」
(B) 乙說：「**5** 大於 **3**，應該先用 **3** 除，所以過程不正確。」
(C) 丙說：「最大公因數為 $5 \times 9 \times 7 \times 3 = 945$ 。」
(D) 丁說：「結果不正確，最大公因數不應有因數 **7**。」

5	945	2835	540
9	189	567	108
7	21	63	12
3	3	9	12
	1	3	4

14. b 是一個正整數，其所有正因數有 **1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36**。則 b 與 **240** 的最大公因數為何?
 (A) **4** (B) **6** (C) **9** (D) **12**
15. 將一張長 **64** 公分、寬 **48** 公分的長方形紙板，切成若干個面積大小相同的正方形，求正方形邊長的最大值是多少公分? (A) **8** (B) **12** (C) **16** (D) **24**
16. 甲、乙、丙三人，甲每工作四天休息一天，乙每工作五天休息一天，丙每工作六天休息一天，若三人同時在 **4月5日** 休息，則下一次三人同時休息是幾天之後?
 (A) **60** (B) **120** (C) **210** (D) **240**
17. 下列各選項的敘述，何者錯誤?
 (A) a, b 為兩個相異質數，則 $(a, b) = 1$ (B) a, b 為兩個相異質數，則 $[a, b] = a \times b$
 (C) 若 a, b 兩數互質，則 $(a, b) = 1$ (D) 若 a, b 兩數互質，則 a, b 兩數必為質數
18. 求 **144** 和 **720** 的最大公因數與最小公倍數各是多少?
19. 若 $a = 20, b = 24, c = 32$ ，求 (1) $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $[a, b, c] = \underline{\hspace{2cm}}$
20. 若 $A = 2 \times 3^3 \times 5, B = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7, C = 2^3 \times 3^2 \times 11$ ，則：
 (1) $(A, B, C) = \underline{\hspace{2cm}}$ 【以標準分解式表示】
 (2) $[A, B, C] = \underline{\hspace{2cm}}$ 【以標準分解式表示】
21. 有四個數， $A = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2, B = 3 \times 5^2 \times 7^3, C = 2 \times 3 \times 5^3 \times 7, D = 2^4 \times 5 \times 7^2$ ，則
 (1) $(A, B, C, D) = \underline{\hspace{2cm}}$ 【請乘開】
 (2) $[A, B, C, D] = \underline{\hspace{2cm}}$ 【以標準分解式表示】
22. 甲班的阿盟與乙班的小玲各買了一袋數量相同的糖果分給班上同學，都能剛好分完。甲班有 **24** 位同學，乙班有 **30** 位同學，則一袋糖果最少有 顆。
23. 下圖是王老師利用短除法求 $(A, 36, B)$ 的過程，則 $A + B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- | | | | |
|-----|------|------|------|
| C | A | 36 | B |
| 2 | 18 | 12 | D |
| | 9 | 6 | 10 |
24. 一個長方形紙盒的長、寬、高分別為 **18** 公分、**15** 公分、**12** 公分，
 則：(1) 組成一個正方體，最少要多少個這樣的紙盒? (2) 在(1)中的最小正方體的體積為多少立方公分?
25. 男生 **154** 人，女生 **110** 人，若男、女生混合分組，求：(1) 每組男生、女生人數各自相同，則最多可分成多少組? (2) 在(1)中，每組男生、女生各多少人?
26. 男生 **154** 人，女生 **110** 人，若男、女生各自編組，且每組男生人數、女生人數均相同，求：(1) 每組最多為 人 (2) 承(1)，此時共有 組。
27. 已知 $(a, 24) = 8, [a, 24] = 48$ ，求 a 之值為何?
28. 將蘋果、鳳梨、草莓三種不同口味麵包分裝到盒子裡，蘋果口味 **64** 個、鳳梨口味 **48** 個、草莓口味 **40** 個。則：(1) 如果每盒內相同口味麵包的數量分別相同，則最多可分裝成幾盒? (2) 每盒內的麵包總數為多少個?